# Zadania

**4.1.** Wykaż, że

$$[\hat{\mathbf{p}}^2, \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}] = 0,$$

a zatem hamiltonian równania Schrödingera dla cząstki swobodnej komutuje z operatorem momentu pędu.

**4.2.** Wykaż, że $u_1$ oraz $u_2$ są ortogonalne, tj. $u_1^\dagger u_2 = 0$.

**4.3.** Zweryfikuj stwierdzenie, że zależność energii i pędu Einsteina jest odzyskiwana, jeśli którykolwiek z czterech spinorów Diraca z zależności (4.48) zostanie podstawiony do równania Diraca zapisanego w kategoriach pędu $(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$.

**4.4.** Dla cząstki z czteropędem $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ można zapisać ogólne rozwiązanie równania Diraca dla cząstki swobodnej jako

$$\psi(p) = [au_1(p) + bu_2(p)]e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)}.$$

Korzystając z jawnych postaci dla $u_1$ i $u_2$, pokaż, że czterowektor prądu $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ wynosi

$$j^\mu = 2p^\mu.$$

Ponadto wykaż, że uzyskana gęstość prawdopodobieństwa i prąd prawdopodobieństwa są zgodne z cząstką poruszającą się z prędkością $\beta = \mathrm{p}/E$.

**4.5.** Zapisz czteroelementowy spinor $u_1$ w postaci dwóch dwuelementowych wektorów

$$u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix},$$

Wykaż, że w granicy nierelatywistycznej, gdzie $\beta \equiv \mathrm{v}/c \ll 1$, składowe $u_\mathrm{B}$ są mniejsze niż składowe $u_\mathrm{A}$ o współczynnik $\mathrm{v}/c$.

**4.6.** Rozważając trzy przypadki $\mu = \nu = 0$, $\mu = \nu \neq 0$ oraz $\mu \neq \nu$, wykaż, że

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$

**4.7.** Wykorzystując równanie Diraca,

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0,$$

z $\gamma^\nu\partial_\nu$, udowodnij, że składowe $\psi$ spełniają równanie Kleina-Gordona,

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\psi = 0.$$

**4.8.** Wykaż, że

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0.$$

**4.9.** Wychodząc od zależności

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0,$$

pokaż, że odpowiednie równanie dla spinora sprzężonego ma postać

$$\bar{u}(\gamma^\mu p_\mu - m) = 0.$$

Stąd, nie używając formy jawnej spinorów $u$, pokaż, że warunek normalizacji $u^\dagger u = 2E$ prowadzi do

$$\bar{u}u = 2m,$$

oraz że

$$\bar{u}\gamma^{\mu}u = 2p^{\mu}.$$

**4.10.** Zademonstruj spójność dwóch relacji z równania (4.45), wykazując, że $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2$.

**4.11.** Rozważ proces anihilacji $e^+e^- \to \gamma \to e^+e^-$ w układzie środka masy, gdzie energia fotonu wynosi $2E$. Omów zachowanie energii i ładunku dla dwóch przypadków, w których:

(a) rozwiązania równania Diraca o ujemnej energii są interpretowane jako cząstki o ujemnej energii rozchodzące się wstecz w czasie,
(b) rozwiązania równania Diraca o ujemnej energii są interpretowane jako antycząstki o dodatniej energii rozchodzące się w przód w czasie.

**4.12.** Sprawdź, że operator skrętności

$$\hat{h} = \frac{\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{2\mathrm{p}} = \frac{1}{2\mathrm{p}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix},$$

komutuje z hamiltonianem Diraca,

$$\hat{H}_D = \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m.$$

**4.13.** Wykaż, że

$$\hat{P}u_{\uparrow}(\theta, \phi) = u_{\downarrow}(\pi - \theta, \pi + \phi),$$

i skomentuj wynik.

**4.14.** W połączeniu operacji parzystości i sprzężenia ładunkowego ($\hat{C}\hat{P}$) spinory ulegają przekształceniu

$$\psi \to \psi^{c} = \hat{C}\hat{P}\psi = i\gamma^2\gamma^0\psi^*.$$

Pokaż, że aż do całkowitego współczynnika fazy zespolonej

$$\hat{C}\hat{P}u_{\uparrow}(\theta, \phi) = v_{\downarrow}(\pi - \theta, \pi + \phi).$$

**4.15.** Wychodząc z równania Diraca, wyprowadź tożsamość

$$\bar{u}(p')\gamma^{\mu}u(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p')(p + p')^{\mu}u(p) + \frac{i}{m}\bar{u}(p')\Sigma^{\mu\nu}q_{\nu}u(p),$$

gdzie $q = p' - p$ oraz $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$.